**CONCOURS SUR ÉPREUVES D'ADMISSION
DANS LE CORPS DES OFFICIERS DE LA
GENDARMERIE NATIONALE**

ouvert aux sous-officiers de carrière de gendarmerie titulaires d'une licence de l'enseignement supérieur général ou technologique, d'un autre titre ou diplôme enregistré au moins au niveau 6 relatif au répertoire national des certifications professionnelles, d'un titre ou diplôme reconnu comme équivalent à ces derniers ou d'un titre professionnel dont la liste est fixée par arrêté du ministre de l'intérieur.

- OG SD -

SESSION 2024

ÉPREUVE À OPTION : MATHÉMATIQUES

(Durée : 03 heures – Coefficient : 15 - Note éliminatoire < 5/20)

Toutes les calculatrices sont autorisées, y compris programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome (aucune connexion) et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.

Le sujet comporte 5 pages dont la présente page de titre.

Chaque exercice est indépendant et peut donc être traité dans l'ordre choisi par le candidat, tant que les exercices sont clairement séparés sur la copie.

Exercice 1 - Étude de fonctions

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'étude d'une fonction ainsi qu'au calcul d'une aire.

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 3 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B - Étude de f

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = x$, est une asymptote de $\mathscr{C}$.
3. Calculer la dérivé $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
4. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente $\mathscr{T}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
6. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$ ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
2. En déduire l'aire, exprimée en cm^2, de la région du plan délimitée par : les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$, l'axe des abscisses ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.
   Hachurer cette région sur le graphique.

Exercice 2 - Étude de suites

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 \\ u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+2} &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On définit la suite (h_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$h_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

   (a) Calculer h_0.
   (b) Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.
   (c) En déduire la nature de la suite (h_n) ainsi que sa raison.
   (d) Exprimer h_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant , pour tout n appartement à $\mathbb{N}$:

$$w_n = \frac{u_n}{h_n}$$

   (a) Calculer w_0.
   (b) Exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de h_n.
   (c) En déduire que, pour tout n appartement à $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   (d) Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}$$

5. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 3 – Géométrie

Partie A - Plan réel

Le plan réel est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 1 - 2t \\ y &= 3 - t \\ z &= 2t \end{cases} \qquad \text{avec } t \text{ appartenant à } \mathbb{R},$$

et A, le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan p passant par A et perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Partie B - Plan complexe

Dans cette partie, indépendante de la précédente, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2i, \quad z_B = -\sqrt{3} + i \ \text{ et } \ z_C = \sqrt{3} + i$$

1. (a) Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.
   (b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   (c) Faire une figure en plaçant le point A puis tracer le cercle Γ en y plaçant les points B et C.
2. Écrire le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
3. On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ radians.
   (a) Montrer que le point O', image du point origine O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.
   (b) Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur Γ.
   (c) Tracer Γ', l'image du cercle Γ par la rotation r.
   (d) Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
4. (a) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + i\right|$$

   (b) Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

Exercice 4 – Calculs de probabilités

Un groupement de gendarmerie départementale déclenche une opération de grande ampleur sur différents points du département.
Cette opération, baptisée "Tempête", s'appuyant sur les effectifs du groupement ainsi que ceux d'unités d'appui de niveau régional et national mobilise plus de 900 gendarmes.

Le bilan du volet "contrôle des flux", notamment de véhicules, de cette opération est le suivant :

- sur l'ensemble des véhicules contrôlés dans la tranche horaire [02h - 05h], les jours de fin de semaine et dans une zone propice à l'organisation de rassemblements festifs, un quart a donné lieu au relevé d'au moins une infraction à l'issue de tests de dépistage de l'imprégnation alcoolique et de l'usage de stupéfiants des conducteurs ;
- parmi les infractions relevés, 60% sont liées à la conduite sous l'empire d'un état alcoolique et 40% connexes à la conduite d'un véhicule en ayant fait usage de substances ou plantes classées comme stupéfiants.

Lors des contrôles de véhicules durant la tranche horaire [02h - 05h], on considère les événements suivants :

- V : « le conducteur contrôlé est l'auteur d'au moins une infraction à l'issue des dépistages »,
- A : « l'infraction relevée concerne uniquement la conduite sous l'empire d'un état alcoolique »,
- S : « les deux infractions relevées concernent la conduite sous l'empire d'un état alcoolique ainsi que la conduite d'un véhicule en ayant fait usage de substances ou plantes classées comme stupéfiants ».

On considère que les conditions de cette opération de contrôles permettent le calcul de probabilités associées à ces différents événements.
On utilisera, dans la suite, la notation $p_B(A)$ pour préciser la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Calculer $p(V)$, $p_V(A)$, et $p_V(S)$.
2. Calculer la probabilité que l'infraction relevée concerne uniquement la conduite sous l'empire d'un état alcoolique.
3. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre d'infractions relevées lors du contrôle dans la tranche horaire [02h - 05h].
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.